



TITLE:

極小曲面のガウス写像の除外値の個数について(極小写像の位相と幾何)

AUTHOR(S):

藤本, 坦孝

CITATION:

藤本, 坦孝. 極小曲面のガウス写像の除外値の個数について(極小写像の位相と幾何). 数理解析研究所講究録 1987, 626: 157-183

ISSUE DATE:

1987-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99975>

RIGHT:

極小曲面のガウス写像の除外値の個数について

金沢大理 藤本坦孝 (Hiroataka Fujimoto)

§ 1 序

\mathbb{R}^3 内の極小曲面 M に対し, M の Gauss 写像とは, 定義により, M の各点 p に, M が p での単位法線ベクトル $G(p)$ を対応させる写像 $G: M \rightarrow S^2$ である. M を自然に Riemann 面とみなすとき, G と立体射影 $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} (= P^1(\mathbb{C}))$ との合成の共役 $g = \overline{\pi \circ G}$ は, M 上の有理型関数となる. 便宜上, 以下では, g を M の Gauss 写像と呼ぶことにする.

1961年, R. Osserman が, 非平坦完備極小曲面の Gauss 写像 g は, 対数容量正の集合を除外し得ないことを示した ([10]). その後, F. Xavier は, この様な写像 g の除外値は高々 6個であることを証明した ([14]). また, 最近筆者は, この様な写像 g の除外値の個数は, 高々 4であることを証明することができた ([8]). Gauss 写像が至多 4個の値を除外する \mathbb{R}^3 内の完備極小曲面の例は, 古くから知られている ([11], [12]). 従って, 除外値の個数 4 は, これ以下に下げ

られた。筆者はまた, Gauss 写像が 5 個以上の値を除外する極小曲面について, Gauss 曲率に対する一つの評価式を与えた ([8]). ここでは, 有理型関数の値分布論における defect と類似の性質をもつ, 新しい型の modified defect を定義し, modified defect relation を与えて, 上述の結果の精密化を導く。

次節で, 三種類の modified defect の定義を与え, それ等の間の関係や基本的性質を述べ, §3 で主結果を説明し, §4 以降で, それらの証明を与える。

§2 Modified defect の定義とその基本的性質

開 Riemann 面 M , 及び非定数正則写像 $f: M \rightarrow P(\mathbb{C})$ を考える。共通零点をもたぬ M 上の正則関数 f_0, f_1 を取り $f = (f_0: f_1)$ と表示する。以下, この様な f の表示を, f の既約表示と呼ぶ。各点 $\alpha \in P(\mathbb{C})$ に対し, $|\alpha^0|^2 + |\alpha^1|^2 = 1$ をみたす α^0, α^1 を取り, $\alpha = (\alpha^0: \alpha^1)$ と表示し, $F_\alpha := \alpha^1 f_0 - \alpha^0 f_1$ とおく。また, $\|f\| = (|f_0|^2 + |f_1|^2)^{1/2}$ とおく。

定義 2.1. 写像 f に対する値 α の S -defect を,

$$\delta_f^S(\alpha) := 1 - \inf \{ \tau; \tau \text{ は条件 } (M)_S \text{ をみたす非負実数} \}$$

によって定義する。ここで, 条件 $(M)_S$ とは, $[-\infty, \infty)$ に値をもつ M 上の有調和連続関数 u ($u \neq -\infty$) で条件

$$(D1) \quad e^u \leq \|f\|^2,$$

$$(D2) \quad \text{各点 } z \in f^{-1}(\alpha) \text{ に対し}$$

$$\lim_{z \rightarrow z} (u(z) - \log |z - z|) \in [-\infty, \infty)$$

が存在する。ここで z は z の近傍での正則局所座標を表す。

をみたす様なものが取れることを意味する。

注意. S -defect は, 論文 [6], [7] で non-integrated defect と呼んだものと一致する。

定義 2.2. f に対する α の H -defect を

$$\delta_f^H(\alpha) := 1 - \inf \eta; \eta \text{ は条件 } (*)_H \text{ をみたす非負実数}$$

によって定義する。ここで, 条件 $(*)_H$ とは, M 上の $[-\infty, \infty)$ に値をもつ連続関数 u で, 条件 (D1), (D2) をみたし, $f^{-1}(\alpha)$ 以外で調和なものが存在すること意味する。

定義 2.3. f に対する α の O -defect を次で定義する。

$$\delta_f^O(\alpha) := 1 - \inf \left\{ \frac{1}{m}; F_\alpha \text{ が } < m \text{ 位の零点をもたない} \right\}.$$

容易にわかる様に, S -defect, H -defect, O -defect いずれも, f の既約表示や, α の表示の仕方によらない。

明らかに, $(*)_H$ をみたす η は $(*)_S$ もみたす。また, F_α が m より小さい位数の零点をもたぬとき, $\eta = 1/m$ は $(*)_H$ をみたす。実際, 関数 $u = (1/m) \log |F_\alpha|$ を取れば, $M \setminus f^{-1}(\alpha)$ 上調和であり, 条件 (D1), (D2) をみたす。従って,

$$(2.4) \quad 0 \leq \delta_f^O(\alpha) \leq \delta_f^H(\alpha) \leq \delta_f^S(\alpha) \leq 1.$$

これは、Nevanlinna defect と似た次の性質をもつ。

命題 2.5. (i) 丁度 $f(\alpha)$ 上で零である様相有界正則関数 f が存在するとき、 $\delta_f^H(\alpha) = \delta_f^S(\alpha) = 1$ 。

(ii) F_α が m より低い位数の零点をもたないとき、

$$\delta_f^S(\alpha) \geq \delta_f^H(\alpha) \geq \delta_f^O(\alpha) \geq 1 - \frac{1}{m}.$$

特に、 $f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ のとき、 $\delta_f^O(\alpha) = 1$ 。

証明. (ii) は O -defect の定義から明らかである。(i) は、関数 $u = \log(|g| / \sup_{z \in M} |g|)$ が、 $M \setminus f^{-1}(\alpha)$ 上で調和であり、 $\lambda = 0$ として条件 (D1), (D2) をみたすことによる。

そこで、 $M = \mathbb{C}$ の場合に modified defect と Nevanlinna defect との間の関係を見ておこう。必要なら座標をずらし、 $f(0) \neq \alpha$ とする。有理型関数の値分布論において、 f の位数関数及び $f^{-1}(\alpha)$ の値数関数は、それぞれ

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|$$

$$N_f^\alpha(r) = \int_0^r \#(f^{-1}(\alpha) \cap \{z : |z| \leq t\}) \frac{dt}{t}$$

で与えられる。ここで $\#A$ によって A の元の個数を表す。(重

複度を考慮しない場合の) Nevanlinna defect は、

$$\delta_f(\alpha) := 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N_f^\alpha(r)}{T_f(r)}$$

と定義される。このとき、次の関係式が成り立つ。

$$(2.6) \quad 0 \leq \delta_f^S(\alpha) \leq \delta_f(\alpha).$$

証明. 条件 (D1), (D2) をみたす実数 η , 及び方根和連続関数 u ($\neq -\infty$) を取る. ここで $u(0) \neq -\infty$ としよ. $f(\alpha)$ の各点で 1 位の零点をもち他で零でない M 上の正則関数 g を取れば, (D2) により $v := u - \log |g|$ は M 全体で方根和である. 各正数 r に対し, (D1) の両辺の対数を, $\{z: |z|=r\}$ 上で平均を取り, Jensen の公式を適用すれば,

$$\begin{aligned} \eta (T_f(r) + \log |f(0)|) &= \eta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f\|(re^{i\theta}) d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta \\ &\geq N_f^\alpha(r) + \log |g(0)| + v(0). \end{aligned}$$

従って,

$$1 - \eta \leq 1 - \frac{N_f^\alpha(r)}{T_f(r)} + \frac{\text{const}}{T_f(r)}.$$

$r \rightarrow \infty$ とし, η に依りて下限を取れば, 求める結果を得る.

Nevanlinna 理論により, 次の defect relation が成り立つ.

定理 2.7 ([4]). 非定数正則写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow P(\mathbb{C})$, 及び, 任意有限個の相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ に対し,

$$\sum_{j=1}^g \delta_f(\alpha_j) \leq 2.$$

系 2.8. 定理 2.7 と同じ仮定のもとに $\sum_{j=1}^g \delta_f^S(\alpha_j) \leq 2$.

この事実は、後に主結果の証明の中で使われる。後節で、この事実の直接証明を与える (§5 末)。

§3 主な結果

\mathbb{R}^3 内の (有向連結) 非平坦極小曲面 $x = (x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える。 M に、 \mathbb{R}^3 から誘導された計量 dx^2 を与え、 M の各点の近傍で正の等温座標 (u, v) を取り $z = u + \sqrt{-1}v$ を正則局所座標に選べば、 M は Riemann 面とみられ、各 x_i は M 上の調和関数である。局所座標近傍内で $\phi_i = \frac{\partial x_i}{\partial z}$ ($i=1, 2, 3$) とおけば、 §1 で述べた意味の Gauss 写像 $g : M \rightarrow P(\mathbb{C})$ ($= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) は、 $g = (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2 : \phi_3)$ ($= \phi_3 / (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2)$) で与えられる ([1, 2])。仮定から g は非定数正則写像である。 M が完備のとき、次の modified defect relation が成り立つ。

定理 I. $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を非平坦完備極小曲面とし、 g をその Gauss 写像とするとき、相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ に対し、

$$\sum_{j=1}^q \delta_g^H(\alpha_j) \leq 4.$$

命題 2.5 によって、任意の $\alpha_j \notin g(M)$ に対し、 $\delta_g^H(\alpha_j) = 1$ 。従って、定理 I より直ちに次の系が導かれる。

系 3.1. \mathbb{R}^3 内の非平坦完備極小曲面の Gauss 写像 g に対し、つねに $\#(P(\mathbb{C})) \leq 4$ 。

必ずしも完備でない非平坦極小曲面 $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える。

M の各点 p に対し, M の p での Gauss 曲率を $K(p)$ で表す. また, p から M の境界までの距離を $d(p)$ で表す. 即ち,

$$d(p) := \inf \{ p \text{ から } M \text{ の境界に近づく連続曲線の長さ} \}$$

ここで, 連続曲線 $\Gamma: x = \gamma(t) \ (a \leq t < b)$ が M の境界に近づくとは, どんなコンパクト集合 K に対しても, t が b に十分近いとき, $\gamma(t) \notin K$ となることを意味する.

定理 II. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面とし, g をその Gauss 写像とする. 相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_2$ に対し,

$$\sum_{j=1}^2 \int_g^0 (\alpha_j) > 4$$

が成り立つとき, α_j 及び $\int_g^0 (\alpha_j)$ のみに依存する定数 C で

$$|K(p)| \leq \frac{C}{d(p)^2} \quad (p \in M)$$

を満たすものが存在する.

次に, \mathbb{R}^4 内の定偏極小曲面 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4): M \rightarrow \mathbb{R}^4$ を考える. よく知られている様に, \mathbb{R}^4 内の原点を含む 2次元有向平面の全体は, 自然に, $P(\mathbb{C})$ 内の 2次曲面

$$Q_2(\mathbb{C}) := \{ (w_1: w_2: w_3: w_4); \ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 0 \}$$

と同一視できる. M の Gauss 写像は, 各点 $p \in M$ に, M の p での有向接平面に対応する点 $G(p) \in Q_2(\mathbb{C})$ を対応させる写像 $G: M \rightarrow Q_2(\mathbb{C})$ として定義される. 一方, $Q_2(\mathbb{C})$ は, $P(\mathbb{C}) \times P(\mathbb{C})$ に双正則である. 従って, G は \square の写像 g_k :

$M \rightarrow P(\mathbb{C})$ ($k=1, 2$) の組 $g = (g_1, g_2)$ と同一視される. 各点の局所座標近傍内で $\phi_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}$ ($i=1, \dots, 4$) とおくと, $g_1 = (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2; \phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4)$, $g_2 = (\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2; -\phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4)$ が成り立つ ([9]). 各 $g_k: M \rightarrow P(\mathbb{C})$ は正則である.

定理 III. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ を定備極小曲面とし, $g = (g_1, g_2): M \rightarrow P(\mathbb{C}) \times P(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とする.

(i) $g_1 \neq \text{const}$ か, $g_2 \neq \text{const}$ のとき, 任意の相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1} \in P(\mathbb{C})$, 及び相異なる値 $\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2l_2} \in P(\mathbb{C})$ に対し, 次の不等式のいずれかが成り立つ.

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \delta_{g_1}^H(\alpha_{1i}) \leq 2.$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^{l_2} \delta_{g_2}^H(\alpha_{2j}) \leq 2.$$

$$(c) \quad \frac{1}{\sum_{i=1}^{l_1} \delta_{g_1}^H(\alpha_{1i}) - 2} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{l_2} \delta_{g_2}^H(\alpha_{2j}) - 2} \geq 1.$$

(ii) g_1 または g_2 のいずれか一方, 例えば g_2 が定数で, 他方が非定数のとき, 任意の相異なる $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ に対し,

$$\sum_{i=1}^l \delta_{g_1}^H(\alpha_i) \leq 3.$$

定理 III は, 論文 [6] 定理 6.3 を精密にしたものである.

§ 4. Cowen - Griffiths の不等式.

\mathbb{C} 内の開円板 $\Delta_R = \{z; |z| < R\}$ から $P(\mathbb{C})$ への非定数正則写像 f , 及び相異なる値 $\alpha_j = (a_j^0; a_j^1) \in P(\mathbb{C})$ ($1 \leq j \leq l$)

を考へる. ここで, $|a_j^0|^2 + |a_j^1|^2 = 1$. f の Δ_R 上での既約表示 $f = (f_0, f_1)$ と取り, $\|f\|^2 := (|f_0|^2 + |f_1|^2)^{1/2}$, $w(f_0, f_1) = f_0 f_1' - f_0' f_1$, $F_j := a_j^1 f_0 - a_j^0 f_1$ ($1 \leq j \leq 2$) とおく.

定理 4.1. 任意の正数 ε に対し,

$$\Delta \log \left(\frac{\|f\|^2}{\prod_{j=1}^2 \log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} \right) \geq C \frac{\|f\|^{2g-4} |w(f_0, f_1)|^2}{\prod_{j=1}^2 |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

をみたす, α_j のみによって与えられる正定数 C , 及び ε のみによって与えられる正定数 μ が存在する.

これは, [4] における結果を書きかえたものである.

補題 4.2. 任意の正数 ε に対し, 正数 $\mu_0(\varepsilon)$ を適当に取れば, 任意の $\mu \geq \mu_0(\varepsilon)$ について

$$\Delta \log \left(\frac{1}{\log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} \right) \geq \frac{4 |w(f_0, f_1)|^2}{\|f\|^2 |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} - \varepsilon \Delta \log \|f\|^2.$$

証明. $\varphi_j = |F_j|^2 / \|f\|^2$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right|^2 &= \frac{1}{\|f\|^8} |F_j' \bar{F}_j - F_j \bar{F}_j'|^2 \|f\|^2 - |F_j|^2 (f_0' \bar{f}_0 + f_1' \bar{f}_1) \\ &= \frac{|F_j|^2}{\|f\|^8} \cdot |w(f_0, f_1)|^2 |a_j^0 \bar{f}_0 + a_j^1 \bar{f}_1|^2 \\ &= \frac{|F_j|^2}{\|f\|^8} |w(f_0, f_1)|^2 ((|a_j^0|^2 + |a_j^1|^2)(|f_0|^2 + |f_1|^2) - |a_j^1 f_0 - a_j^0 f_1|^2) \\ &= (\varphi_j - \varphi_j^2) \frac{|w(f_0, f_1)|^2}{\|f\|^4}. \end{aligned}$$

一方,

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \|f\|^2 = \frac{(|f_0'|^2 + |f_1'|^2)(|f_0|^2 + |f_1|^2) - |f_0 \bar{f}_1' + f_1 \bar{f}_0'|^2}{\|f\|^4} = \frac{|W(f_0, f_1)|^2}{\|f\|^4}$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned} \Delta \log \frac{1}{\log \frac{\mu}{\varphi_j}} &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\log \frac{\mu}{\varphi_j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log \varphi_j \right) \\ &= \frac{4}{\log \frac{\mu}{\varphi_j}} \frac{\partial^2 \log \varphi_j}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{4}{\varphi_j^2 \log^2 \frac{\mu}{\varphi_j}} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} \right|^2 \\ &= - \frac{4}{\log \frac{\mu}{\varphi_j}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \|f\|^2 + \frac{4(\varphi_j - \varphi_j^2)}{\varphi_j^2 \log^2 \frac{\mu}{\varphi_j}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \|f\|^2 \\ &= \frac{4}{\varphi_j^2 \log^2 \frac{\mu}{\varphi_j}} \frac{|W(f_0, f_1)|^2}{\|f\|^4} - 4 \left(\frac{1}{\log^2 \frac{\mu}{\varphi_j}} + \frac{1}{\log \frac{\mu}{\varphi_j}} \right) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \|f\|^2. \end{aligned}$$

よって $\varphi_j \leq 1$ が成り立つ故、 $(1/\log^2 \mu(\varepsilon)) + (1/\log \mu(\varepsilon)) < \varepsilon$

をみたす $\mu(\varepsilon)$ を取れば、求める結果をみたす。

定理 4.1 の証明。与えられた正数 ε に対し、 $\mu \geq \mu_0(\varepsilon/\delta)$ をみたす μ を取る。補題 4.2 によって、

$$\begin{aligned} \Delta \log \frac{\|f\|^2}{\prod_{j=1}^2 \log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} &\geq \varepsilon \Delta \log \|f\|^2 + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{4 |W(f_0, f_1)|^2}{\|f\|^2 |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} - \frac{\varepsilon}{\delta} \Delta \log \|f\|^2 \right) \\ &= \frac{4 |W(f_0, f_1)|^2}{\|f\|^4} \sum_{j=1}^2 \delta \frac{\|f\|^2}{|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}}. \end{aligned}$$

一方、相異なる添字 i, j ($1 \leq i < j \leq 2$) に対し、 f_0, f_1 が F_i と F_j の一次結合で書けることから、 $\|f\| \leq C_{ij} \max(|F_i|, |F_j|)$

ε に対して d_0, d_j のみによって定まる定数 C_{ij} が存在する。

$$C_0 := \max_{1 \leq i < j \leq g} C_{ij}, \quad M := \max \left\{ \frac{x}{\log^2 \mu x} : 0 < x \leq C_0 \right\}$$

と置く。

そこで、 ε と $z \in \Delta_R$ を任意に取り

$$|F_{j_1}(z)| \leq |F_{j_2}(z)| \leq \dots \leq |F_{j_g}(z)|$$

が成り立つ様に j_1, j_2, \dots, j_g を定める。このとき $l=2, \dots,$

g に対し、 $\|f(z)\| \leq C_0 |F_{j_l}(z)|$ が成り立つ。従って、

$$\frac{\|f\|^2}{|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}} \leq M \quad (l=2, 3, \dots, g).$$

これより、 ε と z で

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \frac{\|f\|^2}{|F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}} &\geq \frac{\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}} \\ &\geq \frac{1}{M^{g-1}} \left(\prod_{l=2}^g \frac{\|f\|^2}{|F_{j_l}|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}} \right) \frac{\|f\|^2}{|F_{j_1}|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}} \\ &= \frac{\|f\|^{2g}}{M^{g-1} \prod_{j=1}^g |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_{j_l}|^2}}. \end{aligned}$$

この最右辺は、 j_l の逆ばれ方によらぬ。従って、最右辺 \geq 最右辺は Δ_R 全体で成り立つ。これを最初に得た式に代入すれば、定理 4.1 が成り立つことがわかる。

§ 5. Main Lemma.

非定数正則写像 $f: \Delta_R \rightarrow P(\mathbb{C})$, 及び相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_\delta \in P(\mathbb{C})$ に対し, $\|f\|$, $N(f_0, f_1)$, F_j 等, 前節の記号をそのまゝ踏襲する.

M 上の方調和連続関数 u_1, \dots, u_δ ($-\infty \leq u_j < \infty$, $u_j \not\equiv -\infty$) 及び正定数 $\eta_1, \dots, \eta_\delta$ で, 条件

$$(C1) \quad \gamma := \delta - 2 - (\eta_1 + \dots + \eta_\delta) > 0,$$

$$(C2) \quad e^{u_j} \leq \|f\|^{\eta_j} \quad (1 \leq j \leq \delta),$$

$$(C3) \quad \text{各点 } \zeta \in f^{-1}(\alpha_j) \quad (1 \leq j \leq \delta) \text{ に対し}$$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (u_j(z) - \log |z - \zeta|) \in [-\infty, +\infty)$$

が成立する.

をみたすものを考える.

補題 5.1. 上述の u_j, η_j 及び γ に対し, 正定数 C, μ (>1) を適当に選べば, 成立する

$$v := C \frac{\|f\|^\gamma e^{u_1 + \dots + u_\delta} |N(f_0, f_1)|}{\prod_{j=1}^\delta |F_j| \log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}}$$

は, Δ_R 上の実数値連続関数であり, 超関数の意味で $\Delta \log v \geq v^2$ をみたす.

証明. v は, $\bigcup_{j=1}^\delta f^{-1}(\alpha_j)$ 以外では明らかに連続である. 或いに対し $F_k(\zeta) = 0$ をみたす点 ζ の近傍 \bigcup 上で考える. i と異なる j に対しては, \bigcup_j 上 $F_j(z) \neq 0$ としてよい. また, 必要なら添字をいれかえ, \bigcup 上 $f_0(z) \neq 0$ としてよい.

$\chi_i = w(f_0, f_1)/F_i$ とおく. 有理型関数 $g = f_1/f_0$ を用いて, $\chi_i = \frac{f_0}{a_i} \frac{g'}{a_i - g}$ と書きなおせるゆえ, χ_i は δ で 1 位の極をもつ. 従って

$$\frac{e^{u_1 + \dots + u_g} |w(f_0, f_1)|}{\prod_{j=1}^g |F_j|} = |z - \delta| |\chi_i| e^{u_i - \log |z - \delta|} \cdot \frac{e^{u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_g}}{\prod_{j \neq i} |F_j|}$$

は δ の近傍で有限である. これより $\lim_{z \rightarrow \delta} v(z) = 0$ が導かれ, v は Δ_R 上で連続である.

そこで, 定数 C, μ を, C^2, μ が定理 4.1 の条件を満たす様にとる. このとき, 条件 (C1), (C2) によって,

$$\begin{aligned} \Delta \log v &\geq \Delta \log \frac{\|f\|^\delta}{\prod_{j=1}^g \log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} \\ &\geq C^2 \frac{\|f\|^{2\delta-4} |w(f_0, f_1)|^2}{\prod_{j=1}^g |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} \\ &\geq C^2 \frac{\|f\|^{2\delta} e^{2(u_1 + \dots + u_g)} |w(f_0, f_1)|^2}{\prod_{j=1}^g |F_j|^2 \log^2 \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} \\ &= v^2. \end{aligned}$$

補題 5.2. 上述の u_j, γ_j 及び α, δ に対し, 正定数 C, μ を適当に選べば,

$$\frac{\|f\|^\delta e^{u_1 + \dots + u_g} |w(f_0, f_1)|}{\prod_{j=1}^g |F_j| \log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} \leq C \frac{2R}{R^2 - R^2}$$

が成り立つ.

証明は、補題 5.1 に、次の一般化された Schwarz の補題を適用することにより直ちに得られる。

Schwarz の補題 ([1]). v を Δ_R 上の非負値有調和連続関数とする。 Δ_R 上で、超調和の意味で $\Delta \log v \geq v^2$ が成り立つとき、

$$v(z) \leq \lambda_R(z) := \frac{2R}{R^2 - |z|^2} \quad (z \in \Delta_R).$$

証明. $\lambda_r(z)$ は r に関して連続ゆえ、任意の $r (< R)$ に対し $\Delta_r := \{z; |z| < r\}$ 上で、 $\eta_r(z) = \frac{v(z)}{\lambda_r(z)} \leq 1$ を示せば十分である。
 $\lim_{z \rightarrow \partial \Delta_r} \eta_r(z) = 0$ ゆえ、 $\eta_r(z)$ は Δ_r 内の一處 z_0 で最大値を取る。
 $\eta_r(z_0) \leq 1$ を示せばよい。これを否定する。このとき z_0 の或開近傍 U 上で $\eta_r(z) > 1$ 従って $v > \lambda_r$ である。従って、 U 上で超調和の意味で

$$\Delta \log \eta_r = \Delta \log v - \Delta \log \lambda_r \geq v^2 - \lambda_r^2 > 0$$

が成り立ち、 $\log \eta_r$ は有調和である。 $z_0 \in U$ で最大値を取ることから、最大値の原理により $\log \eta_r \equiv \text{const.}$ 上の不等式に矛盾する。よって求める結果を得る。

Main Lemma. 関数 u_1, \dots, u_g 及び定数 η_1, \dots, η_g は条件 (C1), (C2) を満たすものとする。このとき、 $0 < \delta \eta < \chi$ を満たす任意の δ に対し、 η_j, η_j 及び δ のみによって定まる定数 C を適当に選んで

$$\|f\|^{s-\delta\delta} \frac{e^{u_1+\dots+u_g} |W(f_0, f_1)|}{|F_1 F_2 \dots F_g|^{1-\delta}} \leq C_0 \frac{2R}{R^2 - |z|^2}$$

が成り立つ様にできる。

証明. 与えられた δ に対し $\tilde{C} := \sup_{0 < x \leq 1} x^\delta \log(M/x^2)$ とおく。

補題 5.2 で与えた定数 C , μ に対し,

$$\begin{aligned} & \|f\|^{s-\delta\delta} \frac{e^{u_1+\dots+u_g} |W(f_0, f_1)|}{|F_1 F_2 \dots F_g|^{1-\delta}} \\ &= \frac{\|f\|^s e^{u_1+\dots+u_g} |W(f_0, f_1)|}{|F_1 F_2 \dots F_g|} \prod_{j=1}^g \left(\frac{|F_j|}{\|f\|} \right)^\delta \\ &\leq \tilde{C}^g \frac{\|f\|^s e^{u_1+\dots+u_g} |W(f_0, f_1)|}{\prod_{j=1}^g |F_j| \log \frac{\mu \|f\|^2}{|F_j|^2}} \\ &\leq C \tilde{C}^g \frac{2R}{R^2 - |z|^2}. \end{aligned}$$

$C_0 := C \tilde{C}^g$ とおけば, 求める不等式が成り立つ。

ここで, Main Lemma の応用による系 2.8 の直接証明を与える。

系 2.8 の証明. 必要なら座標を変えて, $u_j(0) \neq -\infty$, $f_0 \neq \alpha_j$ ($1 \leq j \leq g$), かつ $W(f_0, f_1)(0) \neq 0$ と仮定してよい. 系 2.8 の結論を否定する. このとき, 条件 (C1) を満たす定数 η_j 及び (C2), (C3) を満たす \mathbb{C} 上の非調和連続関数 u_j が存在する. 任意正数 R , 及び $s > \delta\delta > 0$ を満たす δ を取り, 写像 $f|_{\Delta_R}: \Delta_R \rightarrow P(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用し, 結論の式に $z = 0$ を代入すれば, R が, α_j , $\delta_f^S(\alpha_j)$ 及び f , u_j , F_j ,

$W(f_0, f_1)$ の原素の値のみによる定数でおさえられる。これは R の任意性に反する。よって系 2.8 を得る。

§ 6. 定理 I の証明.

$x = (x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面とし, $g : M \rightarrow P(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とする。本節の目的は定理 I の証明にあるが、論法の一部を次節でも利用する ~~ため~~, しばらく完備性を仮定しない。 M の普遍被覆面 $\tilde{M} \rightarrow M$ にええし, $\tilde{x} = x \circ \tilde{\omega} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ も非平坦極小曲面であり, その Gauss 写像は $\tilde{g} = g \circ \tilde{\omega}$ でおえられる。また, g に対する modified defect は, \tilde{g} に対するものを越えない。従って, 定理 I, II の証明には, $\tilde{M} = M$ と仮定してよい。 \mathbb{R}^3 内の極小曲面はコンパクトであり得ないから, Koebe の一変換定理により, M は \mathbb{C} 又は \mathbb{C} 内の単位円板に双正則である。 \mathbb{C} に双正則な場合は, 系 2.8 によって定理 I は正しい。また定理 II はこの場合を除外してよい。以下, M は単位円板に双正則であると仮定する。

Gauss 写像 g の既約表示 $g = (g_0 : g_1)$ を取り, $\|g\| = (|g_0|^2 + |g_1|^2)^{1/2}$ とおく。計算に f によって容易に確かめられる様に, \mathbb{R}^3 から誘導される M の計量は, $f = \frac{\partial x_1}{\partial z} - \sqrt{-1} \frac{\partial x_2}{\partial z}$, $g = \frac{g_1}{g_0}$ とおくと,

$$ds^2 = |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2$$

でおえられる ([12]). $h = f/g^2$ とおけば,

$$ds^2 = |h|^2 \|g\|^4 |dz|^2$$

と書きなおされ、 h は零点をもたぬ M 上の正則関数である。

そこで、 $P(C)$ 内の相異なる値 d_1, \dots, d_g に対し

$$\sum_{j=1}^g \delta_g^H(\alpha_j) > 4$$

と仮定する。このとき、 H -defect の定義により、

$$\gamma := g - 2 - (\eta_1 + \dots + \eta_g) > 2$$

をみたす非負実数 η_j 、及び $f^{-1}(\alpha_j)$ 以外で調和な M 上の連続関数 u_j ($1 \leq j \leq g$) で、写像 g に対し (2), (3) をみたすものが存在する。

$$(6.1) \quad \frac{\gamma-2}{g} > \delta > \frac{\gamma-2}{g+2}$$

をみたす δ を取り、 $p = \frac{2}{\gamma-2\delta}$ とおく。このとき

$$(6.2) \quad 0 < p < 1, \quad \frac{\delta p}{1-p} > 1.$$

M 内の商集合 $M' := M \setminus \{F_1 F_2 \dots F_g \mid w(g_0, g_1) = 0\}$ 上の関数

$$(6.3) \quad v := |h|^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{|F_1 F_2 \dots F_g|^{1-\delta}}{e^{\eta_1 + \dots + \eta_g} |w(g_0, g_1)|} \right)^{\frac{p}{1-p}}$$

を考える。ここで、 F_j は、写像 g 及び値 d_1, \dots, d_g に対し (4) の最初に定義したような関数を表す。仮定により、 M' の普遍被覆 $\pi: \tilde{M}' \rightarrow M'$ に対し、 $\log v \circ \pi$ は \tilde{M}' 上の調和関数である。 $\log v \circ \pi$ に共役な調和関数 w を取れば、 $\psi = e^{\log v \circ \pi + w}$ は \tilde{M}' 上正則であり、 $|\psi| = v \circ \pi$ をみたす。一点 $0 \in M'$ を

取る. M' を \mathbb{C} 内の部分領域とみて, 0 を原点としてよい.
 M' の各点 \tilde{p} は, $0 < \omega(\tilde{p})$ を結び M' 内の連続曲線 $\gamma_{\tilde{p}}$ のホモ
 トピー類と 1 対 1 に対応する. 定数曲線 0 に対応する M' の
 点を 0 で表す. そこで, M' 上の正則関数 F を

$$w = F(\tilde{p}) = \int_{\gamma_{\tilde{p}}} \psi(z) dz$$

によって定義する. F は, $F(0) = 0$, $dF(\tilde{p}) \neq 0$ ($\tilde{p} \in M'$) を
 みたす. 従って, 0 の或近傍 U を, 開円板 Δ_R 上へ双
 正則にうつす. この様な R の中で最大のものを取り重: $\omega(H_0)$
 $:\Delta_R \rightarrow M'$ とおく. ここで $R = \infty$ ではあり得ない. 実際,
 M' は \mathbb{C} 内の有界領域と双正則ゆえ, ψ は Δ_R 上の有界正則
 関数とみちさし, $R = \infty$ とすると Liouville の定理に矛盾する.

そこで, $\partial\Delta_R$ の各点 a に対し, 0 と a を結び線分 L_a , 及
 びその重による像

$$\Gamma_a : z = \zeta(ta) \quad 0 \leq t < 1$$

を考える. 或点 $a_0 \in \partial\Delta_R$ に対し, Γ_{a_0} は M の境界に近づく
 事を示そう. これを否定する. このとき, 各点 $a \in \partial\Delta_R$ に対
 し, $\zeta_0 := \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(ta) \in M$ が存在する様な 1 に収束する
 数列 $\{t_k\}$ ($0 < t_k < 1$) が取れる. $\zeta_0 \in M'$ とする. 或
 いに対し $F_a(\zeta_0) = 0$ のときは, 補題 5.1 の証明の中で示した
 ことから $\liminf_{z \rightarrow \zeta_0} |(F_1 F_2 \dots F_p)(z)|^{\frac{p}{1-p}} \psi(z) > 0$ が成り立
 つ. また, $W(g_0, g_1)(\zeta_0) = 0$ のときは, $\liminf_{z \rightarrow \zeta_0} |W(g_0, g_1)|^{\frac{p}{1-p}} \psi > 0$.

いずれの場合でも、 z_0 の近傍で、

$$v \geq \frac{C}{|z - z_0|^{sp/(1-p)}}$$

が成り立つ様な正数 C が存在する。(6.2) に注意すれば、

$$R = \int_{\Gamma_a} |dw| = \int_{\Gamma_a} \left| \frac{dw}{dz} \right| |dz| = \int_{\Gamma_a} v(z) |dz| \geq C \int_{\Gamma_a} \frac{|dz|}{|z - z_0|^{sp/(1-p)}} = \infty$$

となり、矛盾に達する。従って、 $z_0 \in M'$ 。 M' 内で相対コンパクトな z_0 の単連結開近傍 V を取る。 v は \bar{V} 上の正值連続関数ゆえ、 $C' := \min_{z \in \bar{V}} v(z) > 0$ 。もし $\Omega(t\alpha) \cap V$ をみたす t はいくらでも近い t が存在すれば、 Γ_a は、 z_0 の近傍と V の周を無限回往復し、

$$R = \int_{\Gamma_a} v(z) |dz| \geq C' \int_{\Gamma_a} |dz| = \infty$$

となってしう。従って、或 $t_0 (< 1)$ に対し $\Omega(t\alpha) \in V$ ($t_0 < t < 1$) である。この議論は、 V を z_0 の任意の開近傍で置き換えても有効である。これより $\lim_{t \rightarrow 1-0} \Omega(t\alpha) = z_0$ が成り立つ。そこで、 $\omega^{-1}(V)$ の $\{(F|U)^{-1}(t\alpha) : t_0 < t < 1\}$ を含む連結成分 \tilde{V} を取れば、 $\omega|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V$ は同相写像ゆえ、

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} (F|U)^{-1}(t\alpha) = \tilde{p}_0 \in \tilde{M}'$$

が存在する。他方、 F は \tilde{p}_0 の或開近傍を α の開近傍上に双正則にうつす。これより、 $(F|U)^{-1}$ は Δ_R の任意の点の近傍に解析接続されることがわかる。結局 Δ_R の近傍に接続さ

れる。これから容易にわかる様に、 F は \bar{U} の或附近傍を Δ_R の附近傍上に双正則にうつす。これは R の取り方に及す。従って、 M の境界に近づく様な Γ_{a_0} が少なくとも一つ存在する。

写像 $\pi = \pi(w)$ は至る所で局所同相写像であり、 M' 上の計量 ds^2 の π によるひきもどしは、

$$\pi^*(ds^2) = |h \circ \pi|^2 \|g \circ \pi\|^4 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 |dw|^2$$

で与えられる。他方、 $w = F(z)$ の定義より、

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^{1-p} = \frac{|h| |F_1 F_2 \cdots F_g|^{(1-\delta)p}}{(e^{u_1 + \cdots + u_g} |W(g_0, g_1)|)^p}$$

が成り立つ。 $f = g \circ \pi$, $f_0 = g_0 \circ \pi$, $f_1 = g_1 \circ \pi$ とおき、 $u_j \circ \pi$, $F_j \circ \pi$ を略して u_j, F_j で表せば、 $W(f_0, f_1) = (W(g_0, g_1) \circ \pi) \frac{dz}{dw}$ より

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = \frac{(e^{u_1 + \cdots + u_g} |W(f_0, f_1)|)^p}{|h| |F_1 F_2 \cdots F_g|^{(1-\delta)p}}$$

が得られる。従って、

$$(6.4) \quad \pi^* ds^2 = \left(\frac{\|h\|^2 (e^{u_1 + \cdots + u_g} |W(f_0, f_1)|)^p}{|F_1 F_2 \cdots F_g|^{(1-\delta)p}} \right)^2 |dw|^2$$

ここで、写像 $f: \Delta_R \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用すれば、

$$\pi^* ds^2 \leq C_1 \left(\frac{2R}{R^2 - |w|^2} \right)^{2p} |dw|^2$$

を得る。これから、

$$(6.5) \quad d(0) \leq \int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{\Gamma_{a_0}} \pi^* ds \leq C_1^{\frac{1}{2}} \int_0^R \left(\frac{2R}{R^2 - |w|^2} \right)^p |dw| = C_2 R^{1-p}.$$

ここで, C_1, C_2 は α_j 及び $\delta_j^H(\alpha_j)$ ($\leq \delta_f^H(\alpha_j)$) のみによって与えられる定数を表す. そこで, 定理 I における様に, M を完備とする. このとき $d(0) = \infty$ である. これは, $R < \infty$ に矛盾する. 結局, 非平坦完備極小曲面については, 本節の大前提 $\sum_{j=1}^8 \delta_j^H(\alpha_j) > 4$ が否定され, 定理 I を得る.

§7. 定理 II の証明.

定理 II における様に, $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を非平坦極小曲面 $g: M \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とし, 相異なる値 $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ に対し

$$(7.1) \quad \sum_{j=1}^8 \delta_j^0(\alpha_j) > 4$$

が成り立つものとする. 前節で述べた様に, M は \mathbb{C} 内の単位円板としてよい. $g = (g_1: g_2)$, $\|g\|$, F_j 等, 前節の記号をそのまま踏襲する. 仮定 (7.1) と O -defect の定義から,

$$\gamma := \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{m_8}\right) - 2 > 2$$

をみたし, 各 F_j ($1 \leq j \leq 8$) が, $< m_j$ 位の零点を持つような様な正整数 m_1, \dots, m_8 が存在する. $\eta_j = \frac{1}{m_j}$, $u_j = \eta_j \log |F_j|$ とおく. このとき, 各 u_j は $M \setminus f^{-1}(\alpha_j)$ 上調和であり, 写像 $g: M \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ に対し, §5 の条件 (C2), (C3) をみたす. これらの u_j , η_j に対し, 前節の議論がそのまま有効である. 前節と全く同様の方法で写像 $\psi: \Delta_R \rightarrow M'$ を定義し, 写像

$f = (f_0, f_1) = g \circ \Phi : \Delta_R \rightarrow P'(\mathbb{C})$ に Main Lemma を適用する。

(6.1) をみれば δ を取れば,

$$(7.2) \quad \frac{\|f\|^{\gamma-2\delta} |W(f_0, f_1)|}{|F_1|^{1-\eta_1-\delta} \cdots |F_g|^{1-\eta_g-\delta}} = \frac{\|f\|^{\gamma-2\delta} e^{\eta_1+\cdots+\eta_g} |W(f_0, f_1)|}{|F_1 F_2 \cdots F_g|^{1-\delta}} \leq C_0 \left(\frac{2R}{R^2 - |W|^2} \right)$$

が成り立つ。ここで C_0 は d_j, η_j のみによって定まる定数
を表す。前節同様 $p = 2/(\gamma - 2\delta)$ とおいて, (7.2) を $p-1$
乗 $w = 0$ を代入すると,

$$(7.3) \quad R^{1-p} \leq \frac{1}{(2C_0)^{1-p}} \frac{(|F_1(0)|^{1-\eta_1-\delta} \cdots |F_g(0)|^{1-\eta_g-\delta})^{1-p}}{|W(f_0, f_1)|^{1-p} \|f(0)\|^{2(1-p)/p}}.$$

一方, 前節で求めた (6.4) に $e^{\eta_j} = |F_j|$ を代入すれば,

$$\Phi^* ds^2 = \lambda^2 |dw|^2 = \frac{\|f\|^4 |W(f_0, f_1)|^{2p}}{(|F_1|^{1-\eta_1-\delta} \cdots |F_g|^{1-\eta_g-\delta})^{2p}} |dw|^2$$

を得る。M の 0 での Gauss 曲率は,

$$K(0) = - \frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} = - \frac{4 |W(f_0, f_1)(0)|^{2(1-p)} (|F_1(0)|^{1-\eta_1-\delta} \cdots |F_g(0)|^{1-\eta_g-\delta})^{2p}}{\|f(0)\|^8}$$

によって与えられる。この式を (7.3) の右辺と比較して

$$R^{1-p} \leq \text{const} \frac{\prod_{j=1}^g |F_j(0)|^{1-\eta_j-\delta}}{|K(0)|^{1/2} \|f\|^{2(1+p)/p}}$$

が得られる。ここで $|F_j|/\|f\| \leq 1$, 故に

$$\frac{2(1+p)}{p} = 2 \left(\frac{\gamma-2\delta}{2} + 1 \right) = \sum_{j=1}^g (1-\eta_j-\delta)$$

に注意すれば, $R^{1-p} \leq \text{const } |K(0)|^{-1/2}$ を得る. この式と, 前節で得た (6.5) と組み合わせれば, 求める結果が得られる.

§ 8 定理 III の証明.

定理 III における様に, $x = (x_1, \dots, x_4) : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ を非平坦完備極小曲面とし, $g = (g_1, g_2) : M \rightarrow P(\mathbb{C}) \times P(\mathbb{C})$ をその Gauss 写像とする. § 6 及び § 7 と同様, M は \mathbb{C} 内の単位円板と双正則であるとしてよい. 各 g_k ($k=1, 2$) の既約表示 $g_k = (g_{k1} : g_{k2})$ を取り, $\|g_k\| = (|g_{k0}|^2 + |g_{k1}|^2)^{1/2}$ とおく. このとき, M の計量は

$$ds^2 := 2 \left(\sum_{\lambda=1}^4 \left| \frac{\partial x_\lambda}{\partial z} \right|^2 \right) |dz|^2 = h^2 \|g_1\|^2 \|g_2\|^2 |dz|^2$$

で与えられる. ここで $h = \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} - \sqrt{-1} \frac{\partial x_2}{\partial z} \right) / g_{10} g_{21}$.

まず (i) を示そう. 定理 III の (a), (b), (c) をすべて否定すると, 各 $k=1, 2$ に対し, 非負実数 η_{kj} , 及び $M \setminus g_k^{-1}(\alpha_{kj})$ 上調和な M 上の連続関数 u_{kj} ($1 \leq j \leq \delta_k$) で, 条件

$$(8.1) \quad \gamma_k := g_k - 2 - (\eta_{k1} + \dots + \eta_{k\delta_k}) > 0 \quad (k=1, 2)$$

$$(8.2) \quad \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} < 1$$

$$(8.3) \quad e^{u_{kj}} \leq \|g_k\|^{\eta_{kj}} \quad (1 \leq j \leq \delta_k, k=1, 2)$$

$$(8.4) \quad \lim_{z \rightarrow \zeta} (u_{kj}(z) - \log |z - \zeta|) \in [-\infty, \infty)$$

が各 $\zeta \in g^{-1}(\alpha_{kj})$ に対し存在する.

をみたすものが取れる. このとき, $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{\delta_k - \delta_k \delta_0} = 1$ をみたす δ_0 を取り, δ_0 に十分近い $\delta (< \delta_0)$ を選んで $p_k :=$

$1/(\delta_k - \bar{\delta}_k \delta) \quad (k=1, 2)$ とおけば,

$$(8.5) \quad 0 < p_1 + p_2 < 1,$$

$$(8.6) \quad \frac{\delta p_k}{1 - p_1 - p_2} > 1 \quad (k=1, 2)$$

が成り立つ。各 α_{kj} を $\alpha_{kj} = (a_{kj}^0; a_{kj}^1)$ と表示し、正則関数 $F_{kj} = a_{kj}^1 g_{k0} - a_{kj}^0 g_{k1}$ を定義する。ここで $|a_{kj}^0|^2 + |a_{kj}^1|^2 = 1$ 。

§6 の関数 (6.3) の代わりに,

$$(8.7) \quad v := \frac{|h|^{\frac{1}{1-p_1-p_2}} (\prod_{i=1}^{p_1} |F_{i1}|)^{p_1} (\prod_{j=1}^{p_2} |F_{2j}|)^{p_2}}{(e^{u_{11}+\dots+u_{1p_1}} |W(g_{10}, g_{11})|)^{p_1} (e^{u_{21}+\dots+u_{2p_2}} |W(g_{20}, g_{21})|)^{p_2}})^{\frac{1}{1-p_1-p_2}}$$

を考えれば, $\log v$ は M の開集合

$$M' := M \setminus \{W(g_{10}, g_{11})W(g_{20}, g_{21})F_{11}\cdots F_{1p_1}F_{21}\cdots F_{2p_2}=0\}$$

上で調和である。 M' の普遍被覆面 $\tilde{M}': M' \rightarrow M'$ を取り、 \tilde{M}' 上で $|\psi| = v \cdot \tilde{\omega}$ をみたす正則関数 ψ を定め、 §6 と同様にして

$$w = F(\tilde{p}) = \int_{\tilde{\gamma}_{\tilde{p}}} \psi(z) dz \quad (\tilde{p} \in \tilde{M}')$$

を定義する。 F は点 $\tilde{p} \in \tilde{M}'$ の既約近傍 U を Δ_R 上に双正則にうつす。 R はこの様な性値をもつもののうち最大のものとすれば、 R は有限であり、一実 $a_0 \in \partial\Delta_R$ に対し、 0 と a_0 を結ぶ線分 L_{a_0} の $\tilde{\omega} = \tilde{\omega} \circ (H_0)^{-1}$ による像 Γ_{a_0} が M の境界に近づく。実際、(6.2) の代わりに (8.6) を使えば、 §6 の論法がそのまま適用される。

そこで、 $f_{kl} = g_{kl} \circ \tilde{\omega} \quad (k=1, 2, l=0, 1)$, $f_k := (f_{k0}; f_{k1})$ とお

き、写像 f_k に Main Lemma を適用する。これより、

$$\frac{\|f_k\|^{\delta_k - g_k \delta} e^{u_{k1} + \dots + u_{kg_k}} |W(f_{k0}, f_{k1})|}{|F_{k1} F_{k2} \dots F_{kg_k}|^{1-\delta}} \leq \text{const} \frac{2R}{R^2 - |W|^2} \quad (k=1, 2).$$

一方、 M の計量 ds^2 の Δ_R 上のひきもとれば、

$$\tilde{g}^* ds^2 = \|f_1\|^2 \|f_2\|^2 \left(|W(f_{10}, f_{11})| \prod_{i=1}^{g_1} \frac{e^{u_{1i}}}{|F_{1i}|^{1-\delta}} \right)^{2p_1} \left(|W(f_{20}, f_{21})| \prod_{j=1}^{g_2} \frac{e^{u_{2j}}}{|F_{2j}|^{1-\delta}} \right)^{2p_2} |W|^2$$

によって与えられる。これらの事実と (8.5) を使えば

$$d(0) \leq \int_{\Gamma_{a_0}} ds = \int_{L_{a_0}} \tilde{g}^* ds \leq \text{const} \int_{L_{a_0}} \frac{|W|}{(R^2 - |W|^2)^{p_1+p_2}} < \infty.$$

これは M の完備性に反する。よって定理 III, (i) を得る。

最後に定理 III, (ii) を示そう。結論を否定すれば、写像

$g: M \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ に対し、 $\gamma := g - 2 - (\eta_1 + \dots + \eta_g) > 1$ 、及び

§5 の条件 (C2), (C3) をみたす正数 η_1, \dots, η_g 及び

$M \setminus f^{-1}(\alpha_j)$ 上調和な M 上の連続関数 u_j ($1 \leq j \leq g$) が存

在する。正数 δ を、 $p := 1/(\gamma - \delta g)$ が (6.2) をみた

す様に選ぶ。(8.7) の代りに、今度は関数

$$v = \frac{|R|^{\frac{1}{1-p}} |F_1 F_2 \dots F_g|^{p(1-\delta)/(1-p)}}{e^{u_1 + \dots + u_g} |W(g_{10}, g_{11})|^{p/(1-p)}}$$

を用いて、§6 と全く同様の議論をすれば矛盾に達する

ことがわかる。従って定理 III, (ii) が成り立つ。

References

- [1] L.A. Ahlfors, Conformal invariants, Topics in geometric function theory, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1973.
- [2] C.C. Chen, On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in \mathbb{R}^4 , Pacific J. Math., 102(1982), 9-14.
- [3] S.S. Chern and R. Osserman, Complete minimal surfaces in euclidean n-space, J. d'analyse Math., 19(1967), 15-34.
- [4] M.J. Cowen and P.A. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature, J. Analyse Math., 29(1976), 93-153.
- [5] H. Fujimoto, On the Gauss map of a complete minimal surface in \mathbb{R}^m , J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 279-288.
- [6] H. Fujimoto, Value distribution of the Gauss maps of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^m , J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 663-681.
- [7] H. Fujimoto, Non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into $P^{N_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times P^{N_k}(\mathbb{C})$, Japanese J. Math., 11(1985), 233-264.
- [8] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, preprint.
- [9] D.A. Hoffman and R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, Amer. Math. Soc. Memoir 236, 1980.

- [10] R. Osserman, Minimal surfaces in the large, Comm. Math. Helv., 35(1961), 65-76.
- [11] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n , Ann. of Math., 80(1964), 340-364.
- [12] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.
- [13] B.V. Shabat, Distribution of values of holomorphic mappings, Transl. of Math. Monographs Vol. 61, AMS. 1985.
- [14] F. Xavier, The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere, Ann. of Math., 113(1981), 211-214.